P 15

Équations de Maxwell

15.1 Compétences du chapitre

Notions et contenus	Capacités exigibles
Principe de la conservation de la charge : formulation locale.	• Établir l'équation locale de la conservation de la charge dans le cas à une dimension.
Équations de Maxwell : formulations locale et intégrale.	• Écrire et interpréter les équations de Maxwell sous forme intégrale. • Interpréter qualitativement le lien entre l'équation de Maxwell-Faraday et la loi de Faraday.
Équations de propagation des champs dans une région vide de charges et de courants.	• Établir les équations de propagation à partir des équations de Maxwell.
Approximation des régimes quasi-stationnaires (ou quasi-permanents).	• Comparer une durée typique d'évolution des sources à une durée de propagation de l'onde électromagnétique.
Cas des champs statiques : équations locales.	• Établir les équations de propagation à partir des équations de Maxwell.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Équation de Poisson et équation de Laplace de l'électrostatique.	• Établir les équations de Poisson et de Laplace de l'électrostatique. • Approche numérique : mettre en œuvre une méthode de résolution numérique pour déterminer une solution à l'équation de Laplace, les conditions aux limites étant données. • **Approche numérique :** mettre en œuvre une méthode de résolution numérique pour déterminer une solution à l'équation de Laplace, les conditions aux limites étant données.

Maxwell, s'appuyant sur les résultats de l'électrostatique, de la magnétostatique et de l'électromagnétisme des régimes quasi stationnaires a postulé les équations suivantes que nous prendrons comme principe fondamental de l'électromagnétisme :

15.2 Forme locale

Nom	équation
Maxwell-Gauss (M-G)	$div\ \overrightarrow{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$
Maxwell-Thomson (M-T)	$div\ \overrightarrow{B} = 0$
Maxwell-Faraday (M-F)	$\overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{E} = -\dfrac{\partial\,\overrightarrow{B}}{\partial t}$
Maxwell-Ampère (M-A)	$\overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{B} = \mu_0\ \overrightarrow{j} + \varepsilon_0\,\mu_0\,\dfrac{\partial\,\overrightarrow{E}}{\partial t}$

TABLE 15.2 – Équations de Maxwell : forme locale

Les équations de Maxwell s'écrivent sous cette forme dans n'importe quel référentiel pourvu que $\overrightarrow{E}$, $\overrightarrow{B}$, ρ et $\overrightarrow{j}$ soient mesurés dans ce même référentiel et que les opérateurs *divergence* et *rotationnel* soient calculés également dans celui-ci.

15.3 Relations annexes

15.3.1 Champ et potentiel électriques

Le champ électrique et le potentiel électrique sont liés par la relation :

$$\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{grad}\,V$$

Ainsi, par exemple en coordonnées cartésiennes, la fonction à 3 variables $V(x, y, z)$ s'écrit :

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}\,dx + \frac{\partial V}{\partial y}\,dy + \frac{\partial V}{\partial z}\,dz$$

Or, le gradient de V s'écrit :

$$\overrightarrow{grad}\,V = \left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial V}{\partial x} \\ \dfrac{\partial V}{\partial y} \\ \dfrac{\partial V}{\partial z} \end{array}\right.$$

et le vecteur $\overrightarrow{d\ell} = d\overrightarrow{OM}$ s'écrit :

$$\overrightarrow{d\ell} = \left|\begin{array}{l} dx \\ dy \\ dz \end{array}\right.$$

On obtient donc :

$$dV = \overrightarrow{grad}\,V \cdot \overrightarrow{d\ell}$$

Soit :

$$dV = -\ \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{d\ell}$$

Si on intègre entre 2 points A et B, on a :

$$\int_{V_B}^{V_A} dV = -\int_{\widehat{BA}} \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{d\ell} = \int_{\widehat{AB}} \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{d\ell}$$

15.3.2 Loi d'Ohm locale

Dans un conducteur électrique, le vecteur densité volumique de courant dépend du champ électrique : $\overrightarrow{j} = \overrightarrow{j}(\overrightarrow{E})$.

Pour les métaux ou les électrolytes, cette relation, linéaire dans un large domaine de fréquences et d'intensité du champ électrique, constitue la loi d'Ohm locale :

$$\overrightarrow{j} = \gamma\,\overrightarrow{E}$$

γ est appelé *conductivité électrique* du milieu.

> Les unités :
> Cette conductivité électrique γ s'exprime en $\Omega^{-1}.m^{-1}$ ou en $S.m^{-1}$.

> — Remarque —
>
> La conductivité γ est l'inverse de la résistivité ρ' avec $R = \rho'\,\dfrac{\ell}{S}$.
> La résistivité s'exprime en $\Omega.m$.

15.3.3 Conservation de la charge

15.3.3.1 Démonstration mathématique

- La relation de Maxwell-Faraday $\overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{E} = -\dfrac{\partial\,\overrightarrow{B}}{\partial t}$ permet d'écrire, en utilisant $div\,(\overrightarrow{rot}) = 0$:

$$div\,(\overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{E}) = -div\left(\frac{\partial\,\overrightarrow{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial\,div\ \overrightarrow{B}}{\partial t} = 0$$

  On n'en déduit aucune information.

- Par contre, en utilisant la relation de Maxwell-Ampère, on a : $div\,(\overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{B}) = 0$ d'une part,

$$\begin{aligned} div\,(\overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{B}) &= div\left(\mu_0\,\overrightarrow{j} + \varepsilon_0\,\mu_0\,\frac{\partial\,\overrightarrow{E}}{\partial t}\right) \\ &= \mu_0\,div\,\overrightarrow{j} + \varepsilon_0\,\mu_0\,\frac{\partial div\ \overrightarrow{E}}{\partial t} \\ &= \mu_0\,div\,\overrightarrow{j} + \mu_0\,\frac{\partial\rho}{\partial t} \end{aligned}$$

  Ce qui permet décrire l'équation de conservation de la charge sous forme locale :

$$\boxed{div\,\overrightarrow{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0}$$

15.3.3.2 Démonstration physique

En notant ρ la densité volumique de charge, la charge contenue dans un volume (τ_0) délimité par la surface fermée (Σ) est donnée par :

$$q\,(t) = \iiint_{(\tau_0)} \rho_{(M,t)}\,d^3\tau$$

Sa variation est alors :

$$\begin{aligned}\frac{dq}{dt} &= \frac{q\,(t+dt) - q\,(t)}{dt} \\ &= \frac{d}{dt}\iiint_{(\tau_0)} \rho_{(M,t)}\, d^3\tau \\ &= \iiint_{(\tau_0)} \frac{\partial \rho}{\partial t}\, d^3\tau\end{aligned}$$

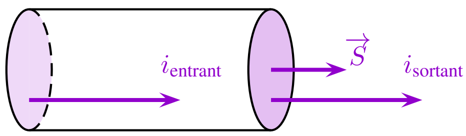

FIGURE 15.1 – Intensité du courant électrique

De plus, cette variation de charge dq par unité de temps est égale à l'intensité totale de courant entrant, soit :

$$\frac{dq}{dt} = i_{\text{entrant}} - i_{\text{sortant}} = -\oiint_{(\Sigma)} \overrightarrow{j}\cdot\overrightarrow{d^2S}$$

$\overrightarrow{d^2S}$ étant un vecteur sortant.

Le théorème de Green-Ostrogradski permet d'écrire : $\oiint_{(\Sigma)} \overrightarrow{j}\cdot\overrightarrow{d^2S} = \iiint_{(\tau_0)} div\ \overrightarrow{j}\ d^3\tau$ et :

$$\frac{dq}{dt} = -\iiint_{(\tau_0)} div\ \overrightarrow{j}\ d^3\tau$$

On en déduit :

$$\iiint_{(\tau_0)} \left(div\ \overrightarrow{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t}\right) d^3\tau = 0$$

Ceci étant vrai quelque soit le volume (τ_0), cela conduit à l'équation de conservation de la charge :

$$\boxed{div\ \overrightarrow{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$$

Cette relation constitue l'équation locale de conservation de la charge électrique.

15.4 Forme intégrale

La forme intégrale d'une des équations de Maxwell se déduit de sa forme locale grâce aux règles suivantes :

— Principe —

- Pour une divergence, on calcule le flux sortant d'une surface fermée et on le transforme à l'aide du théorème de Green-Ostrogradski.
- Pour un rotationnel, on calcule la circulation sur un contour fermé et on la transforme à l'aide du théorème de Stokes-Ampère.

15.4.1 Flux magnétique

L'équation de Maxwell-Thomson est donnée par :

$$\boxed{div\ \overrightarrow{B} = 0}$$

Ceci est la forme locale de l'équation de Maxwell-Thomson.

La forme intégrale peut être déduite, à l'aide du théorème de Green-Ostrogradski :

$$\iiint_{(\tau)} div\ \overrightarrow{B}\ d^3\tau = \oiint_{(\Sigma)} \overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{d^2S}$$

On obtient :

$$\boxed{\oiint_{(\Sigma)} \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{n}\, d^2S = \oiint_{(\Sigma)} \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{d^2S} = 0}$$

où (Σ) est une surface fermée.

On dit que le champ magnétique $\overrightarrow{B}$ est à flux conservatif.

15.4.2 Équation de Maxwell-Faraday

L'équation de Maxwell-Faraday s'écrit, sous sa forme locale :

$$\boxed{\overrightarrow{rot}\, \overrightarrow{E} = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}}$$

En faisant circuler le champ électrique le long d'un contour fermé (Γ) et en appelant (Σ) une surface orientée s'appuyant sur celui-ci, on obtient :

$$\begin{aligned} e &= \oint_{(\Gamma)} \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{d\ell} \\ &= \iint_{(\Sigma)} \overrightarrow{rot}\, \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{n}\, d^2S \\ &= \iint_{(\Sigma)} -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} \cdot \overrightarrow{n}\, d^2S \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \iint_{(\Sigma)} \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{d^2S} \\ &= -\frac{d\Phi}{dt} \end{aligned}$$

Ceci est l'expression globale ou intégrale. On remarque que les deux équations précédentes sont indépendantes du milieu considéré.

⚠ L'équation de Maxwell-Faraday est la traduction de la loi de Faraday exposée en première année lors de l'étude de l'induction électromagnétique : elle traduit le comportement d'un circuit fixe dans un champ électromagnétique variable.

15.4.3 Équation de Maxwell-Gauss

La forme locale de l'équation de Maxwell-Gauss est donnée par :

$$\boxed{div\, \overrightarrow{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

Le théorème de Green-Ostrogradski permet d'en déduire la forme globale ou intégrale :

$$\begin{aligned} \oiint_{(\Sigma)} \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{n}\, d^2S &= \iiint_{(\tau)} div\, \overrightarrow{E}\, d^3\tau \\ &= \iiint_{(\tau)} \frac{\rho}{\varepsilon_0}\, d^3\tau \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{\oiint_{(\Sigma)} \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{n}\, d^2S = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}}$$

où (τ) est le volume intérieur à la surface fermée (Σ).
On retrouve ici le théorème de Gauss.

15.4.4 Équation de Maxwell-Ampère

La forme locale de l'équation de Maxwell-Ampère est donnée par :

$$\boxed{\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{B} = \mu_0\,\overrightarrow{j} + \varepsilon_0\,\mu_0\,\frac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t}}$$

Cette forme est la forme locale du théorème d'Ampère, à laquelle on a ajouté une différentielle du champ électrique. Cette modification était obligatoire pour corriger des aberrations du théorème d'Ampère.

15.4.4.1 Explication de la modification

La forme locale du théorème d'Ampère ne suffit pas. Considérons un circuit en régime non permanent. D'après la forme locale du théorème d'Ampère, on a :

$$\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{B} = \mu_0\,\overrightarrow{j}$$

Or, nous savons que :

$$div\,(\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{B}) = 0$$

Ce qui équivaut à :

$$div\,\overrightarrow{j} = 0$$

Or d'après l'équation de conservation de la charge :

$$-\frac{\partial\rho}{\partial t} = div\,\overrightarrow{j}$$

Cela impliquerait donc que $\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$.

Si le régime n'est pas permanent, c'est donc incohérent. Pour corriger ce défaut, on introduit un courant de déplacement, noté $\overrightarrow{j_D}$ de telle sorte que :

$$\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{B} = \mu_0\,\left(\overrightarrow{j} + \overrightarrow{j_D}\right)$$

On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} div\,\overrightarrow{j} &= -\frac{\partial\rho}{\partial t} \\ &= -\varepsilon_0\,\frac{\partial}{\partial t}\,div\,\overrightarrow{E} \end{aligned}$$

On a alors :

$$\overrightarrow{j} = -\varepsilon_0\,\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{E}$$

$$\begin{aligned} div\,(\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{B}) &= \mu_0\,\left(div\,(\overrightarrow{j} + \overrightarrow{j_D})\right) \\ 0 &= div\,\left[\overrightarrow{j_D} - \varepsilon_0\,\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{E}\right] \end{aligned}$$

Maxwell a donc pris le cas le plus simple :

$$\overrightarrow{j_D} = \varepsilon_0\,\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{E}$$

15.4.4.2 Forme intégrale

En faisant circuler le champ magnétique le long d'un contour fermé (Γ) et en appelant (Σ) une surface orientée s'appuyant sur celui-ci, on obtient :

$$
\begin{aligned}
\oint_{(\Gamma)} \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{d\ell} &= \iint_{(\Sigma)} \overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{n}\, d^2S \\
&= \iint_{(\Sigma)} \left(\mu_0\, \overrightarrow{j} + \varepsilon_0\, \mu_0\, \frac{\partial\, \overrightarrow{E}}{\partial t} \right) \cdot \overrightarrow{n}\, d^2S \\
&= \mu_0\, I + \varepsilon_0\, \mu_0 \iint_{(\Sigma)} \frac{\partial\, \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{n}\, d^2S}{\partial t} \\
&= \mu_0\, I + \varepsilon_0\, \mu_0\, \frac{d\Phi_{(\Sigma)}(\,\overrightarrow{E}\,)}{dt}
\end{aligned}
$$

On retrouve le théorème d'Ampère additionné d'un terme supplémentaire :

$$\varepsilon_0\, \mu_0\, \frac{d\Phi_{(\Sigma)}(\,\overrightarrow{E}\,)}{dt} = \mu_0\, I_D$$

où I_D est l'intensité du courant de déplacement :

$$I_D = \iint_{(\Sigma)} \overrightarrow{j_D} \cdot \overrightarrow{n}\, d^2S$$

Ce terme intervient en régime non permanent.

15.5 Équations de propagation des champs

15.5.1 Expression générale du champ électrique

En appliquant l'opérateur $\overrightarrow{rot}$ à $\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{E}$, on obtient :

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{E} &= \overrightarrow{grad}\,(div\,\overrightarrow{E}) - \overrightarrow{\Delta}\,\overrightarrow{E} \text{ (Voir analyse vectorielle)} \\
\overrightarrow{rot}\left(-\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} \right) &= \overrightarrow{grad}\left(\frac{\rho}{\varepsilon_0} \right) - \overrightarrow{\Delta}\,\overrightarrow{E} \\
-\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{B} &= \overrightarrow{grad}\left(\frac{\rho}{\varepsilon_0} \right) - \overrightarrow{\Delta}\,\overrightarrow{E} \\
-\mu_0\, \frac{\partial}{\partial t}\,\overrightarrow{j} - \varepsilon_0\, \mu_0\, \frac{\partial^2 \overrightarrow{E}}{\partial t^2} &= \overrightarrow{grad}\left(\frac{\rho}{\varepsilon_0} \right) - \overrightarrow{\Delta}\,\overrightarrow{E}
\end{aligned}
$$

Soit :

$$\boxed{\overrightarrow{\Delta}\,\overrightarrow{E} - \varepsilon_0\, \mu_0\, \frac{\partial^2 \overrightarrow{E}}{\partial t^2} = \overrightarrow{grad}\left(\frac{\rho}{\varepsilon_0} \right) + \mu_0\, \frac{\partial\, \overrightarrow{j}}{\partial t}}$$

15.5.2 Champ électrique dans une région sans charge ni courant

Dans une région sans charge $(\rho = 0)$ ni courant $(\,\overrightarrow{j} = \overrightarrow{0}\,)$, la relation précédente s'écrit :

$$\boxed{\overrightarrow{\Delta}\,\overrightarrow{E} - \varepsilon_0\, \mu_0\, \frac{\partial^2 \overrightarrow{E}}{\partial t^2} = \overrightarrow{0}}$$

15.5.3 Expression générale du champ magnétique

De la même façon pour le champ magnétique, on obtient :

$$\boxed{\overrightarrow{\Delta}\overrightarrow{B} - \varepsilon_0\,\mu_0\,\frac{\partial^2\overrightarrow{B}}{\partial t^2} = -\mu_0\,\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{j}}$$

15.5.4 Champ magnétique dans une région sans charge ni courant

$$\boxed{\overrightarrow{\Delta}\overrightarrow{B} - \varepsilon_0\,\mu_0\,\frac{\partial^2\overrightarrow{B}}{\partial t^2} = \overrightarrow{0}}$$

$\Rightarrow$ **Activité 15. 1**

Retrouver la formule précédente à partir des équations de Maxwell dans une région sans charge ni courant.

15.6 Potentiels

15.6.1 Définitions

15.6.1.1 Potentiel-vecteur

Les relations $div\ \overrightarrow{B} = 0$ et $div\,\overrightarrow{rot} = 0$ permettent d'écrire d'introduire le potentiel-vecteur $\overrightarrow{A}$:

$$div\,\overrightarrow{B} = 0 \Rightarrow \exists\overrightarrow{A} \text{ tq } \overrightarrow{B} = \overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{A}$$

Considérons deux potentiels-vecteurs associés à $\overrightarrow{B}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{B} &= \overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{A}\\ &= \overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{A'}\end{aligned}$$

Comme $\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{grad}\,G = \overrightarrow{0}\ \forall G$, on obtient :

$$\overrightarrow{rot}\,(\overrightarrow{A} - \overrightarrow{A'}) = \overrightarrow{0}$$

On peut alors écrire :

$$\overrightarrow{A} - \overrightarrow{A'} = \overrightarrow{grad}\, G$$

On obtient donc :

$$\overrightarrow{A'} = \overrightarrow{A} - \overrightarrow{grad}\, G$$

On voit ainsi que $\overrightarrow{A}$ n'est pas défini de façon unique.

— Propriété —

Le potentiel-vecteur $\overrightarrow{A}$ possède les mêmes propriétés d'invariance et de symétrie que le champ électrique $\overrightarrow{E}$.

15.6.1.2 Potentiel scalaire V

On a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{E} &= -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}\\ &= -\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{A}\end{aligned}$$

On obtient donc :

$$\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{E} + \frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t}\right) = \overrightarrow{0}$$

De même que précédemment, un rotationnel nul peut s'exprimer au moyen d'un gradient ($\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{grad} = \overrightarrow{0}$) :

$$\overrightarrow{E} = -\frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t} - \overrightarrow{grad}\, V$$

On obtient donc l'expression connue dans le cas statique.
De même que pour le potentiel vecteur, on montre que :

$$V' = V - \frac{\partial \Phi}{\partial t} + C^{te}$$

Φ est donc le lien entre $\overrightarrow{A}$ et V. On ne peut pas fixer arbitrairement $\overrightarrow{A}$ et V, ces deux potentiels sont liés.

15.6.1.3 Flux du champ magnétique

Le flux du champ magnétique à travers une surface orientée (Σ) s'écrit $\Phi = \iint_{(\Sigma)} \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{d^2S}$.

En remplaçant $\overrightarrow{B}$ par $\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{A}$, on obtient :

$$\Phi = \iint_{(\Sigma)} \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{d^2S} = \iint_{(\Sigma)} \overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{d^2S}$$

En considérant le contour orienté (Γ) bordant la surface (Σ), la relation de Stokes-Ampère permet alors d'écrire :

$$\Phi = \iint_{(\Sigma)} \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{d^2S} = \oint_{(\Gamma)} \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{d\ell}$$

Le flux du champ magnétique à travers une surface est égal à la circulation du potentiel-vecteur le long du contour bordant la surface.

15.6.2 Conditions de jauge

15.6.2.1 Équations vérifiées par le potentiel-vecteur et le potentiel scalaire

On montre que ces deux potentiels doivent vérifier les relations suivantes :

$$\vec{\Delta}\vec{A} - \varepsilon_0\,\mu_0\,\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = \mu_0\,\vec{j} + \overrightarrow{grad}\left(div\,\vec{A} + \varepsilon_0\,\mu_0\,\frac{\partial V}{\partial t}\right)$$

2 jauges sont couramment utilisées, la jauge de Coulomb et celle de Lorentz.

15.6.2.2 La jauge de Coulomb

La jauge de Coulomb s'exprime de la façon suivante :

$$div\,\vec{A} = 0$$

L'équation précédente devient donc :

$$\vec{\Delta}\vec{A} - \varepsilon_0\,\mu_0\,\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = \mu_0\,\vec{j} + \varepsilon_0\,\mu_0\,\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{grad}\,V$$

15.6.2.3 La jauge de Lorentz

La jauge de Lorentz est la suivante :

$$div\,\vec{A} + \varepsilon_0\,\mu_0\,\frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

À l'aide des ces jauges, on obtient donc deux équations :

$$\vec{\Delta}\vec{A} - \epsilon_0\,\mu_0\,\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = \mu_0\,\vec{j}$$

$$\Delta V - \epsilon_0\,\mu_0\,\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

— Cas particulier —

Dans une région sans charge ni courant, on a alors :

$$\boxed{\Delta V - \epsilon_0\,\mu_0\,\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0}$$

15.7 Régimes quasi-stationnaire et stationnaire

15.7.1 Régime quasi-stationnaire

Un champ électromagnétique mesuré en un point M à l'instant t a en réalité été créé par des charges ou des courants, présents au voisinage d'un point P, souvent loin du point M.
Le champ électromagnétique créé en P se propage jusqu'au point M mais cela n'est pas instantané : la durée pour que le signal se propage de P à M vaut :

$$t_{PM} = \frac{PM}{c}$$

si l'onde se propage à la vitesse c.
L'approximation des régimes quasi-stationnaires consiste à négliger les temps de propagation devant la durée d'évolution des sources, c'est-à-dire leur période T.
Ainsi, cette approximation est valable si :
$t_{PM} = \dfrac{D}{c} \ll T$, soit $D \ll cT$ si on appelle D une grandeur caractéristique correspondant à la taille du dispositif.
De cette façon, le champ électromagnétique s'établit instantanément.

— Exemple —

Considérons une maison d'habitation dont le circuit électrique possède une longueur d'environ $D = 30\,m$. L'approximation des régimes quasi-stationnaires est valable si $T \gg \dfrac{D}{c}$, soit
$T \gg \dfrac{30}{3.10^8} = 10^{-7}\,s$. Cela correspond à une fréquence $f = \dfrac{1}{T} \ll 10^7\,Hz = 10\,MHz$.
On voit que cette approximation est réalisée sans peine pour des circuits électriques classiques.

En régime quasi-stationnaire (ou quasi-permanent), on peut négliger la variation de $\vec{E}$ dans le temps mais pas celle de $\vec{B}$.

Ainsi, seule l'équation de Maxwell-Ampère est modifiée. Elle s'écrit alors :

$$\overrightarrow{rot}\ \vec{B} = \mu_0\,\vec{j}$$

Ceci revient à négliger le vecteur densité de courant de déplacement $\vec{j_D}$ devant le vecteur densité de courant réel $\vec{j}$.
Pour l'instant, nous admettrons que cela se passe ainsi : nous reviendrons sur cette approximation lors de l'étude de la propagation des ondes électromagnétiques.

15.7.2 Régime stationnaire

En régime stationnaire (ou permanent), les champs sont indépendants du temps.

Comme $\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$, la relation de Maxwell-Faraday s'écrit :

$$\overrightarrow{rot}\ \vec{E} = \vec{0}$$

Comme $\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0}$, la relation de Maxwell-Ampère s'écrit :

$$\overrightarrow{rot}\ \vec{B} = \mu_0\,\vec{j}$$

Les équations de Maxwell-Gauss et Maxwell-Thomson sont inchangées.

15.7.3 Récapitulatif

	Régime variable	Régime quasi-stationnaire	Régime stationnaire
Maxwell-Gauss (M-G)	$div\ \overrightarrow{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$	$div\ \overrightarrow{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$	$div\ \overrightarrow{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$
Maxwell-Thomson (M-T)	$div\ \overrightarrow{B} = 0$	$div\ \overrightarrow{B} = 0$	$div\ \overrightarrow{B} = 0$
Maxwell-Faraday (M-F)	$\overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{E} = -\dfrac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}$	$\overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{E} = -\dfrac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}$	$\overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{E} = \overrightarrow{0}$
Maxwell-Ampère (M-A)	$\overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{B} = \mu_0\ \overrightarrow{j} + \varepsilon_0\,\mu_0\,\dfrac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}$	$\overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{B} = \mu_0\ \overrightarrow{j}$	$\overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{B} = \mu_0\ \overrightarrow{j}$

TABLE 15.3 – Équations de Maxwell : récapitulatif

15.8 Application : l'induction électromagnétique

L'induction est un phénomène lié à la variation d'un champ magnétique dans un circuit. La variation de flux $d\Phi$ du champ magnétique pendant la durée dt entraîne l'apparition d'une force électromotrice (notée f.e.m.) $e = -\dfrac{d\Phi}{dt}$: c'est la loi de Lenz-Faraday.
Le circuit subissant l'effet est appelé induit, le champ magnétique provoquant cet effet est appelé inducteur.
Les phénomènes d'induction peuvent être classés en deux catégories :

- inducteur fixe : le phénomène d'induction est lié au déplacement relatif de l'induit par rapport à l'inducteur ou à la déformation du circuit induit (induction de Lorentz).
- induit fixe ; le phénomène d'induction est lié à une variation dans le temps du champ inducteur (induction de Neumann).

La f.e.m. induite peut être détectée directement aux bornes de la bobine en circuit ouvert ou par le courant induit i dans un circuit fermé.
Cet éventuel courant, via la résistance électrique interne du circuit, va chauffer le conducteur, conformément à la loi de Joule.
Une caractéristique générale des courants alternatifs est de ne pas utiliser toute la surface utile des conducteurs pour circuler. Il apparaît, en effet, qu'ils se concentrent sur la périphérie des conducteurs : c'est l'effet de peau. Ainsi, les courants induits sont plus importants en périphérie qu'au cœur du conducteur. Il en résulte que la chaleur est principalement générée à l'extérieur. L'effet de peau est caractérisé par la profondeur de pénétration notée δ. Elle est définie comme comme l'épaisseur de la couche surfacique dans laquelle circule $87\,\%$ de la puissance générée. L'expression de l'épaisseur de peau, de l'ordre du mm, est donnée par :

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{\pi\,\mu\,f\,\gamma}}$$

avec :

- $\mu = \mu_0\,\mu_r$: perméabilité magnétique du milieu,
- f : fréquence des courants,
- γ : conductivité du conducteur (en $S.m^{-1}$).

15.9 Équations de Poisson et de Laplace

15.9.1 Équation de Poisson

La relation $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{grad}\,V$ combinée à l'équation de Maxwell-Gauss donne :

$$div\ \overrightarrow{E} = -div\,\overrightarrow{grad}\,V = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Or, $div\,\overrightarrow{grad} = \Delta$ (l'opérateur Laplacien).
On en déduit $\Delta\,V + \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$ ou encore :

$$\boxed{\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

Cette relation est appelée équation de Poisson.

15.9.2 Équation de Laplace

Dans une région sans charges, la densité volumique de charges ρ est nulle et on en déduit l'équation de Laplace :

$$\boxed{\Delta V = 0}$$